



УДК 551.46(262.5)

**В. Н. Еремеев**<sup>1</sup>, акад. НАН Украины, директор, **С. Г. Дёмышев**<sup>2</sup>, докт. физ.-мат. наук, гл. н.с.,  
**С. В. Кочергин**<sup>2</sup>, к.ф.-м.н., ст.н.с., **В. С. Кочергин**<sup>2</sup>, аспирант

<sup>1</sup> Океанологический центр Национальной академии наук Украины, Севастополь, Украина

<sup>2</sup> Морской гидрофизический институт Национальной академии наук Украины,  
Севастополь, Украина

### ИДЕНТИФИКАЦИЯ НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ В ТРЕХМЕРНОЙ МОДЕЛИ ПЕРЕНОСА ПАССИВНОЙ ПРИМЕСИ В ЧЁРНОМ МОРЕ

Рассматривается модель переноса пассивной примеси, основанная на TVD-схемах. Идентификация начального поля исследуемых характеристик производится при помощи вариационного алгоритма усвоения данных измерений. Выполнены тестовые расчёты по инициализации океанографических полей различной природы на основе модели переноса пассивной примеси в Чёрном море. Проведено усвоение реальных данных измерений концентрации <sup>137</sup>Cs в модели переноса и восстановлены фрагменты начального пространственного распределения изотопа в исследуемых акваториях.

**Ключевые слова:** пассивная примесь, идентификация, вариационный алгоритм усвоения, усвоение данных, Чёрное море.

Для изучения динамики экосистем, в том числе её прикладных аспектов, связанных с оценкой возможных негативных последствий распространения антропогенных примесей в морских акваториях, необходимо совершенствование методов восстановления и прогнозирования формирования полей гидро- и биогеохимических характеристик, генерируемых природными и техногенными источниками. Изучение эволюции таких полей и исследование их пространственно-временной изменчивости возможно на основе математического моделирования и использования современных систем наблюдений. При этом с неизбежностью приходится решать две взаимосвязанные проблемы. Первая – построение или выбор оптимальной модели переноса примеси в полной постановке, учитывающей природу её источника, формы поступления и механизмы миграции в морской среде. Вторая проблема связана с идентификацией входных параметров модели и усвоением имеющихся данных измерений. Под входными параметрами модели понимаются её коэффициенты, поля скоростей и на-

чальные данные полей исследуемых характеристик. При численном моделировании распространения примеси приходится иметь дело с решениями, имеющими большие градиенты. В этих случаях применение TVD-схем [10] оказывается оправданным. Одним из подходов к решению второй задачи является использование адаптированного вариационного алгоритма [3, 6, 9, 11, 12] в последнее время получившего название «adjoint» метода. Суть алгоритма состоит в минимизации квадратичного функционала невязок прогноза при условии, что модель переноса выступает в качестве ограничения на вариации входных параметров.

Прежде чем применять вариационный алгоритм идентификации для трёхмерной задачи переноса пассивной примеси в Чёрном море, рассмотрим её одномерный аналог с параметрами, соответствующими трёхмерной задаче.

В области интегрирования  $D$  на интервале времени  $[0, \bar{t}]$  в качестве модели рассмотрим простейшее одномерное уравнение:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + U \frac{\partial \varphi}{\partial x} = k \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \Gamma : \varphi = 0, \quad t = 0 : \varphi = \varphi_0, \quad (1)$$

где  $U = \text{const}$ ,  $k = \text{const}$ ,  $\Gamma$  – граница области интегрирования.

Пусть на момент времени  $\bar{t}$  имеются данные измерений о поле концентрации  $\varphi_{\text{изм}}$ , тогда задача идентификации параметров модели (1) состоит в нахождении минимума функционала:

$$I_0(\varphi) = \frac{1}{2} (\varphi - \varphi_{\text{изм}}, \varphi - \varphi_{\text{изм}})_{D_t}, \quad (2)$$

$$I(\varphi) = I_0(\varphi) + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + U \frac{\partial \varphi}{\partial x} - k \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \varphi^* \right) + (\varphi, \varphi^*)_{\Gamma_t} - (\varphi - \varphi_0, \varphi^*)_{D_t} \Big|_{t=0} \quad (4)$$

Согласно [6], выбираем множители Лагранжа как решение сопряжённой задачи:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \varphi^*}{\partial t} - U \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} - k \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial x^2} &= 0 \\ \Gamma : \varphi^* &= 0 \\ t = \bar{t} : \varphi^* &= \nabla I(\varphi) \end{aligned} \quad (5)$$

Из условия стационарности функционала имеем:

$$\nabla_{\varphi_0} I(\varphi) = \varphi^* \Big|_{t=0} \quad (6)$$

В пространстве параметров необходимо осуществлять спуск в направлении этого градиента:

$$\varphi_0^{n+1} = \varphi_0^n + \tau \nabla_{\varphi_0} I(\varphi), \quad (7)$$

где  $\tau$  – некоторый итерационный параметр.

Численные эксперименты проводились со следующими значениями входных параметров модели:  $U = 10 \text{ см/с}$ ,  $\Delta x = 1.4 \cdot 10^6 \text{ см}$ ,  $\Delta t = 1.2 \cdot 10^3 \text{ сек}$ ,  $A_M = 10^6 \text{ см}^2/\text{с}$ .

В [4, 5] проведено тестирование работоспособности алгоритма. Показано, что в случае усвоения в качестве  $\varphi_{\text{изм}}$  решения модели (1), алгоритм даёт достаточно хорошую сходимость итерационного процесса. Скорость сходимости зависит от выбранного  $A_M$ , зашумлённости данных измерений и количества ус-

где скалярное произведение определено следующим образом:

$$(\varphi, \varphi^*)_{D_t} = \int_{D_t} \varphi \cdot \varphi^* dD_t = \int_0^{\bar{t}} \int_{D_t} \varphi \cdot \varphi^* dD dt. \quad (3)$$

Минимизация квадратичного функционала (2) осуществляется при условии, что  $\varphi$  является решением модели (1). Поэтому поиск минимума (2) при ограничениях (1) эквивалентен минимизации следующего функционала:

ваиваемой информации. Отмечена значимость факта согласованности информации с исследуемой моделью. В случае отсутствия последнего, скорость сходимости итерационного процесса замедляется, что указывает на наличие в данных информации, являющейся шумом для данной модели. Поэтому весьма важно предварительно исследовать фильтрационные свойства метода идентификации.

На рис. 1 представлено восстановленное начальное поле (штриховая линия) и данные измерений (сплошная линия), полученные по модели на момент времени  $\bar{t} = 90$  сут. Затем данные измерения зашумлялись (на 30 %) сигналом, генерируемым датчиком случайных чисел. Результат наложения шума на  $\varphi_{\text{изм}}$  представлен на рис. 2 (сплошная линия); на нём же изображено восстановленное начальное поле. Сходимость итерационного процесса иллюстрирует рис. 3.

В случае зашумлённости данных измерений сходимость ухудшается (штриховая линия). Одной из известных характеристик шума, является его среднеквадратичная дисперсия. На рис. 4 показано изменение дисперсии отклонений восстановленного начального поля от его известного аналога.

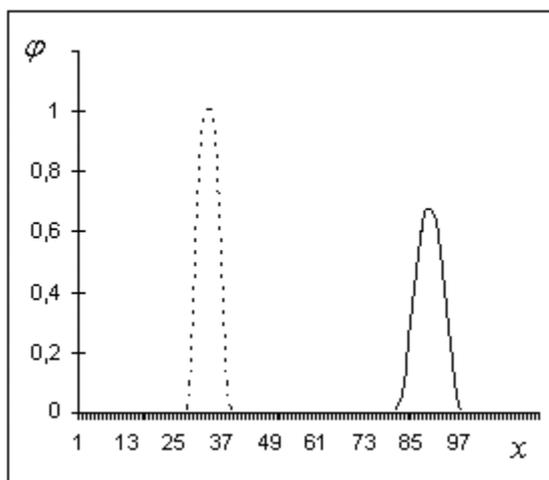


Рис. 1 Данные измерений (—), восстановленное начальное поле (---)

Fig. 1 Data measurements (—) and restored initial field (---)

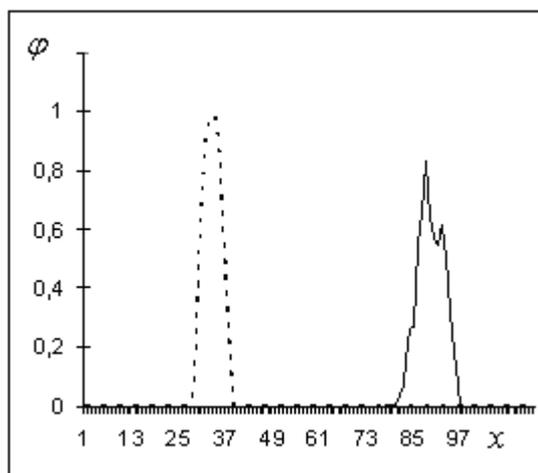


Рис. 2 Восстановленное начальное (---) и данные измерений с шумом (—)

Fig. 2 Restored initial field (---) and data measurements with noise (—)

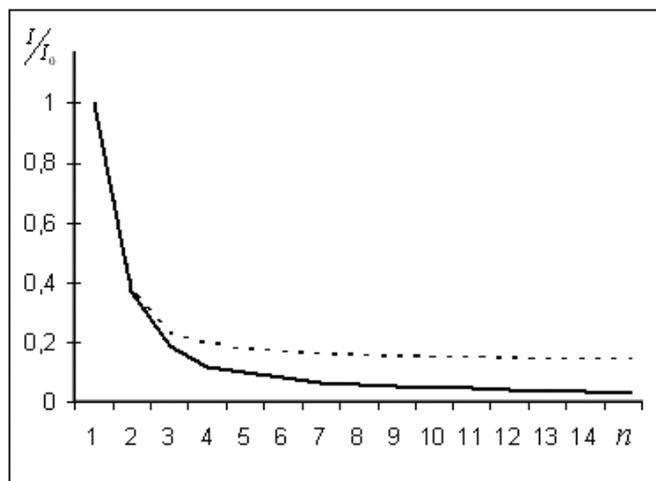


Рис. 3 Нормированные значения функционала. Зашумлённые данные (---) и данные без шума (—)

Fig. 3 Normalized value functional. Data with noise (---) and data without noise (—)

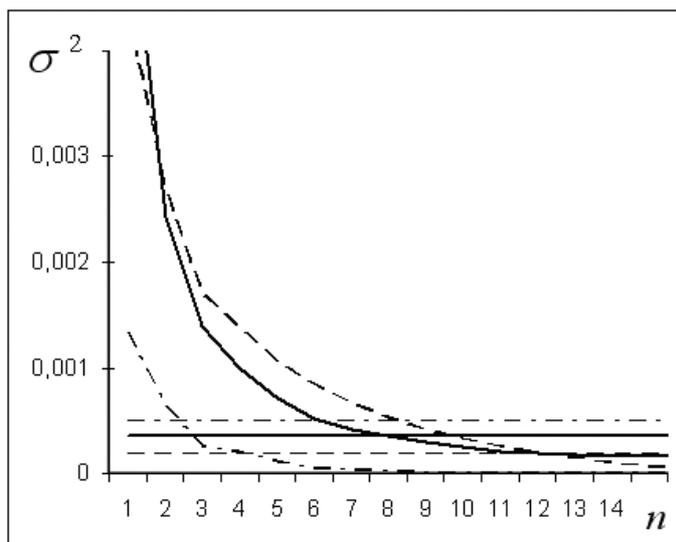


Рис. 4 Среднеквадратичная дисперсия отклонений

Fig. 4 Root-mean-square dispersion voltages

Для наглядности прямой линией изображена среднеквадратичная дисперсия шума в усваиваемой информации. Из рис. 4 видно, что для уменьшения дисперсии в восстановленном поле ниже уровня дисперсии в  $\varphi_{изм}$  необходимо 7 – 8 итераций (сплошная линия). В случае выбора большего количества итераций происходит уменьшение дисперсии, по сравнению с дисперсией шума данных измерений.

В этом заключается важное фильтрационное свойство алгоритма идентификации. На рис. 4 показаны также результаты аналогичных расчетов при  $A_M = 10^5 \text{ см}^2/\text{с}$  (штрихпунктирная линия) и  $A_M = 10^7 \text{ см}^2/\text{с}$  (штриховая линия). Видно, что при уменьшении коэффициента горизонтальной турбулентной диффузии требуется меньшее число итераций для достижения эффекта фильтрации и минимизации функционала.

**Трёхмерная модель переноса пассивной примеси.** В области интегрирования на интервале времени  $[0, \bar{t}]$  рассмотрим следующее уравнение:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial U\varphi}{\partial x} + \frac{\partial V\varphi}{\partial y} + \frac{\partial W\varphi}{\partial z} = k \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + A\Delta\varphi, \quad (8)$$

с краевыми условиями:

$$\Gamma : \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0; \quad z = 0 : \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0; \quad z = H : \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0,$$

и начальными данными:  $t = 0 : \varphi = \varphi_0$ ,

где  $U, V, W$  – поля течений в Чёрном море, полученные по гидротермодинамической модели МГИ [8],  $\Gamma$  – боковая граница,  $n$  – нормаль к границе,  $H$  – глубина моря.

Аналогично одномерному случаю можно показать, что для минимизации квадратичного функционала вида (2) необходимо осуществлять спуск (7) в пространстве параметров. Градиент функционала определяется по формуле (6), где  $\varphi^*$  – решение следующего уравнения:

$$-\frac{\partial \varphi^*}{\partial t} - \frac{\partial U\varphi^*}{\partial x} - \frac{\partial V\varphi^*}{\partial y} - \frac{\partial W\varphi^*}{\partial z} = k \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial z^2} + A\Delta\varphi^*, \quad (9)$$

с краевыми условиями:  $\Gamma : \frac{\partial \varphi^*}{\partial n} = 0$ ;

$$z = 0 : \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} = 0; \quad z = H : \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} = 0,$$

и начальными данными:  $t = \bar{t} : \varphi^* = \nabla I(\varphi)$ .

Задача (9) решается в обратном направлении по времени при помощи процедуры, которая используется нами для решения основной задачи. При этом необходимо, чтобы аппроксимация сопряжённой задачи была согласована с дискретизацией основной задачи.

#### Тестовый расчёт (Чёрное море).

Для реализации тестового варианта сначала при помощи модели было рассчитано поле  $\varphi_{изм}$  (рис. 6). При этом полагали  $\bar{t} = 40 \text{ сут.}$ ,  $A = 10 \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $k = 1 \text{ м}^2/\text{с}$ , а начальное поле концентрации задавалось в виде «квадрата» единичных значений (рис. 5). Затем при помощи вариационной процедуры идентификации начального поля осуществлялся поиск  $\varphi_0$ . В результате мы получили поле (рис. 7), хорошо согласованное с известным полем (рис. 5) и по своему местоположению и по уровню максимальных значений.

Вполне естественно, что поля концентрации условной примеси, рассчитанные по модели, в которой в качестве начальных данных используются восстановленные поля  $\varphi_0$ , практически совпадают с  $\varphi_{изм}$ . Трёхмерный тестовый расчёт даёт возможность приступить к следующему этапу исследования, а именно, тестированию процедуры на реальных данных.

**Расчеты по восстановлению начальных полей  $^{137}\text{Cs}$  в Чёрном море.** В отсутствие реальных измеренных полей течений в Чёрном море для конкретного периода в качестве таковых были взяты климатические поля, полученные по модели [8]. В качестве данных измерений пассивной примеси использовались измерения, произведённые в акватории Чёрного моря в мае – июне 1986 г. [1]. Для  $^{137}\text{Cs}$  период полураспада составляет порядка 30 лет [2], что позволяет рассматривать этот трассер на временных масштабах (до одного года) как пассивную примесь.

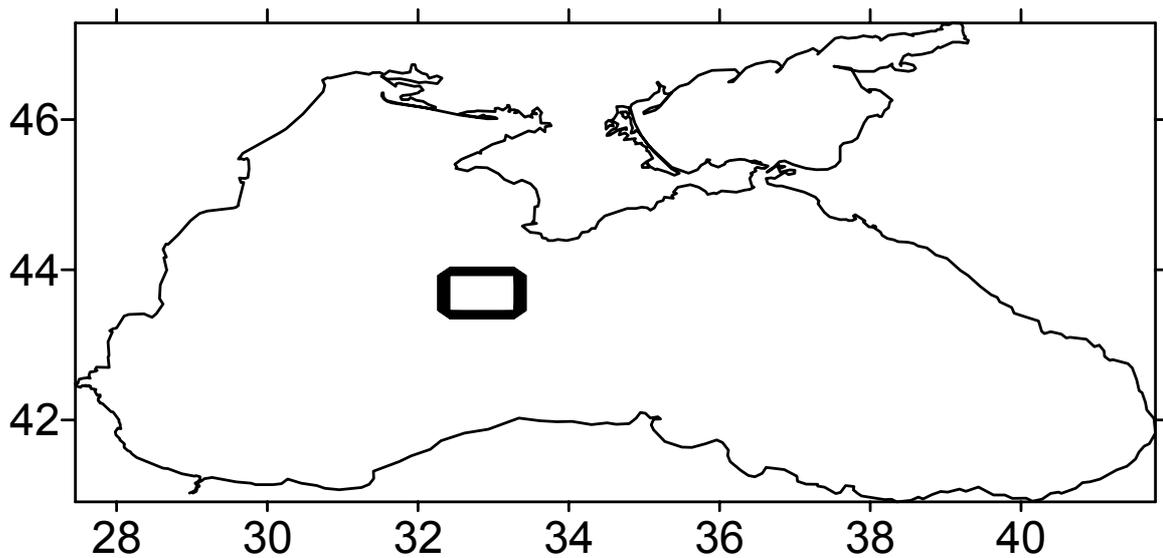


Рис. 5 Начальное поле концентрации  
Fig. 5 Initial field of concentration

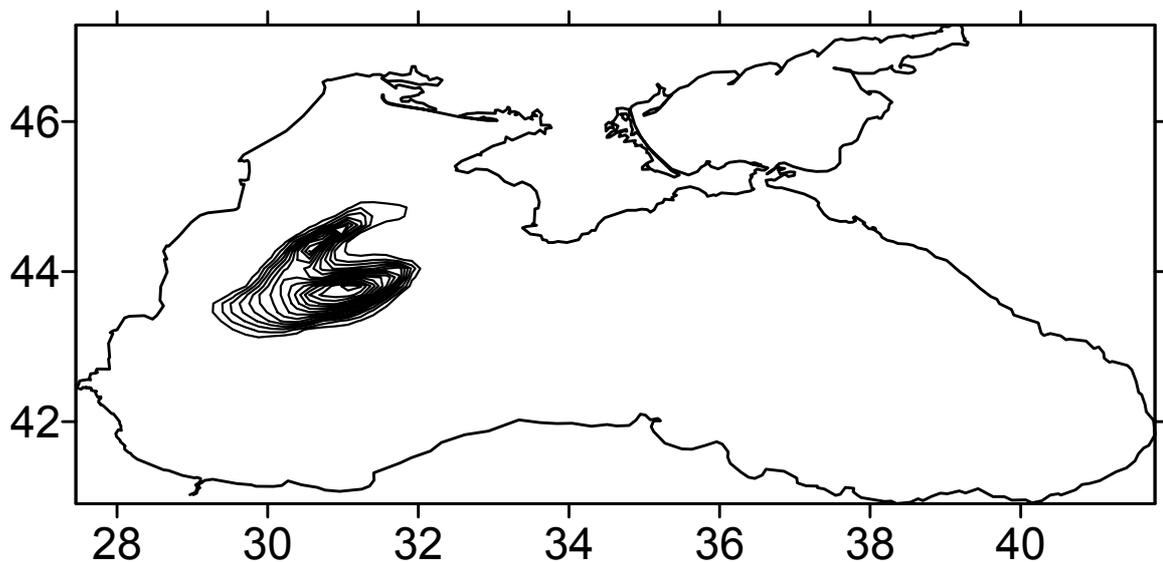


Рис. 6 Генерированные данные измерений  
Fig. 6 Generated data measurements

Интервал времени, на котором реализовывалась задача идентификации, составлял 40 сут. При помощи решения сопряжённой задачи с заданным  $\delta$ -источником в каждой точке измерений были построены функции влияния, показывающие, какие участки акватории могут оказывать воздействие на формирование концентрации примеси в данной точке.

Учитывая недостаточную обеспеченность данными радиоизотопных исследования-

ний акватории Чёрного моря, его районирование на основе анализа рассчитанных функций влияния не представляется целесообразным. Для этих целей необходимо использовать комплекс специально подобранных индикаторов. Нами были выделены группы экстремальных (по уровню концентрации  $^{137}\text{Cs}$ ) точек измерений и воспроизведены фрагменты соответствующих полей в зоне их влияния. На рис. 8 и 10 представлены результаты расчётов эволюции поля концентрации  $^{137}\text{Cs}$  и

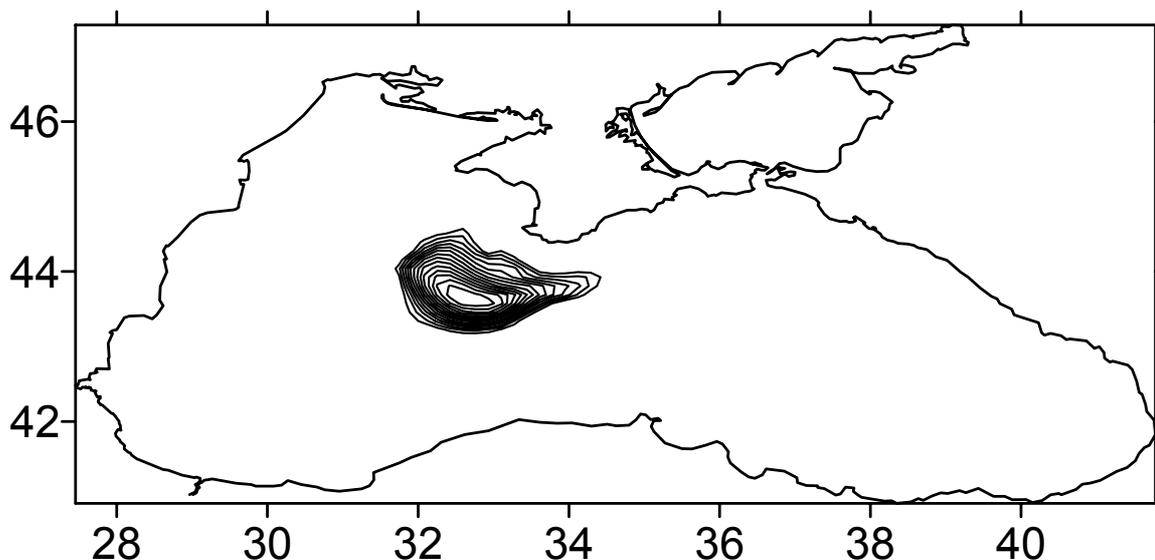


Рис. 7 Восстановленное начальное поле  
Fig. 7 Restored initial data

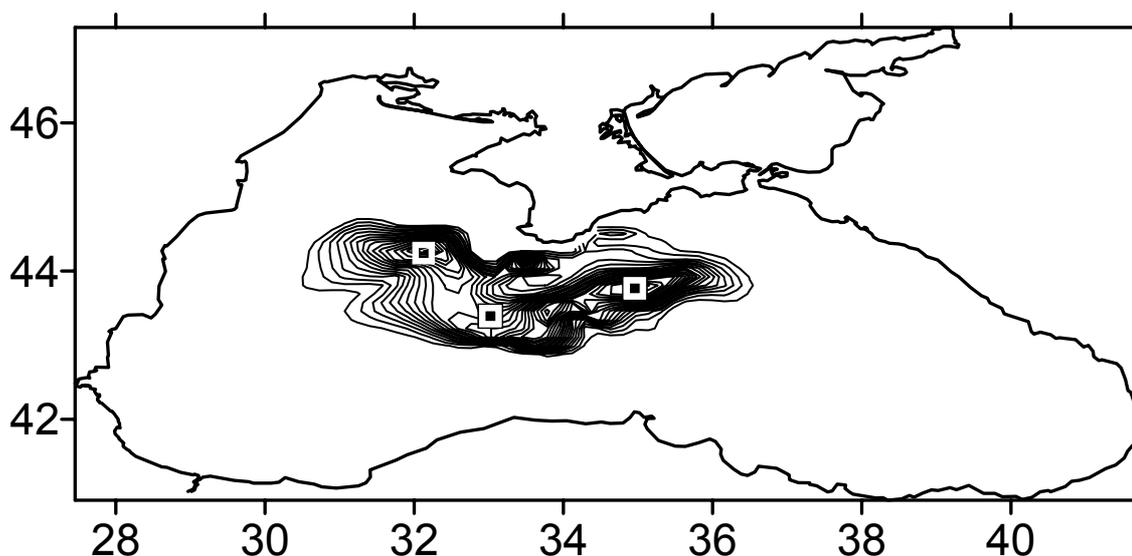


Рис. 8 Данные измерений и полученное поле концентрации  $^{137}\text{Cs}$   
Fig. 8 Data measurements and obtained concentration field  $^{137}\text{Cs}$

восстановления его начальных распределений (рис. 9 и 11). На этих рисунках значками в виде квадратов отмечены используемые точки измерений. Из рис. 8 и 10 видно, что координаты точек измерений хорошо совпадают с экстремумами в моделируемых полях концентраций. Эти поля получены в результате пространственно-временной интерполяции, где в качестве интерполянта выступает сама модель переноса.

**Идентификация полей кокколитофорид с учётом спутниковой информации.** Специфика проведения спутниковых наблюдений для ряда спектральных диапазонов такова, что достаточно часто обширные морские акватории оказываются, из-за развитой облачности, вне зоны информационной досягаемости.

В случаях потери возможности обеспечения непрерывности наблюдений, может

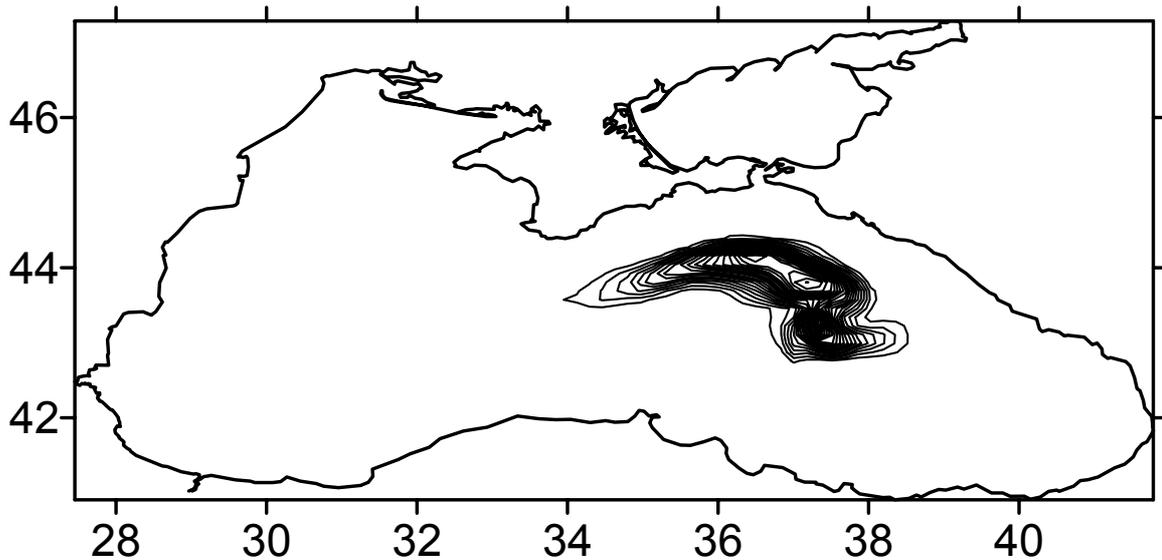


Рис. 9 Восстановленное начальное поле концентрации  $^{137}\text{Cs}$   
Fig. 9 Restored initial concentration field  $^{137}\text{Cs}$

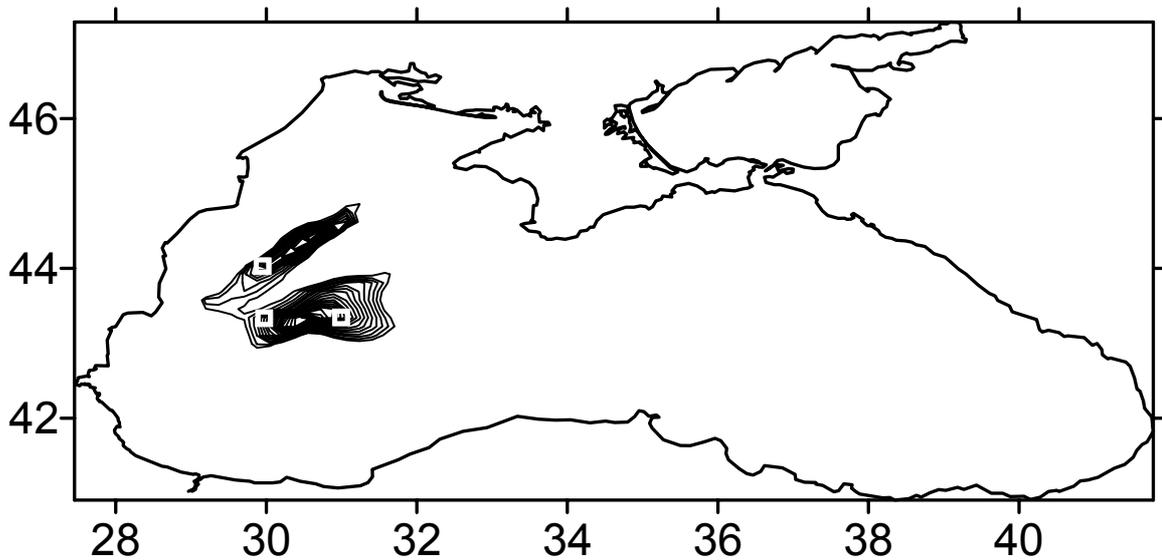


Рис. 10 Данные измерений и рассчитанное поле концентрации  $^{137}\text{Cs}$   
Fig. 10 Data measurements and calculated concentration field  $^{137}\text{Cs}$

оказаться весьма полезным использование выше приведённых алгоритмов и модели переноса пассивной примеси в качестве пространственно-временного интерполянта. При помощи вариационного алгоритма идентификации можно получить результаты, согласованные не только с моделью, но и с информацией о пространственном распределении трассера в верхнем слое моря. В данном эксперименте мы использовали спутниковые

данные, любезно предоставленные С. В. Станичным и его интерпретацию идентификации светового сигнала на спутниковых снимках, как реакцию на наличие скоплений кокколитофорид (частн. сообщ.). Биологическая структура данного трассера такова, что он обладает определённой плавучестью и его наибольшая концентрация сосредоточена в верхнем 20 – 25-метровом слое, что позволяет из-за его строения (наличие

целлюлозной или целлюлозно-пиктиновой оболочки, покрытой известковыми тельцами или кремнезёмными чешуйками [7]) надёжно идентифицировать его по рассеянию в диа-

пазоне 0.55 мкм. Более того, для данного периода времени года при температуре больше 13<sup>0</sup>С такая идентификация в пользу именно кокколитофорид оправдана.

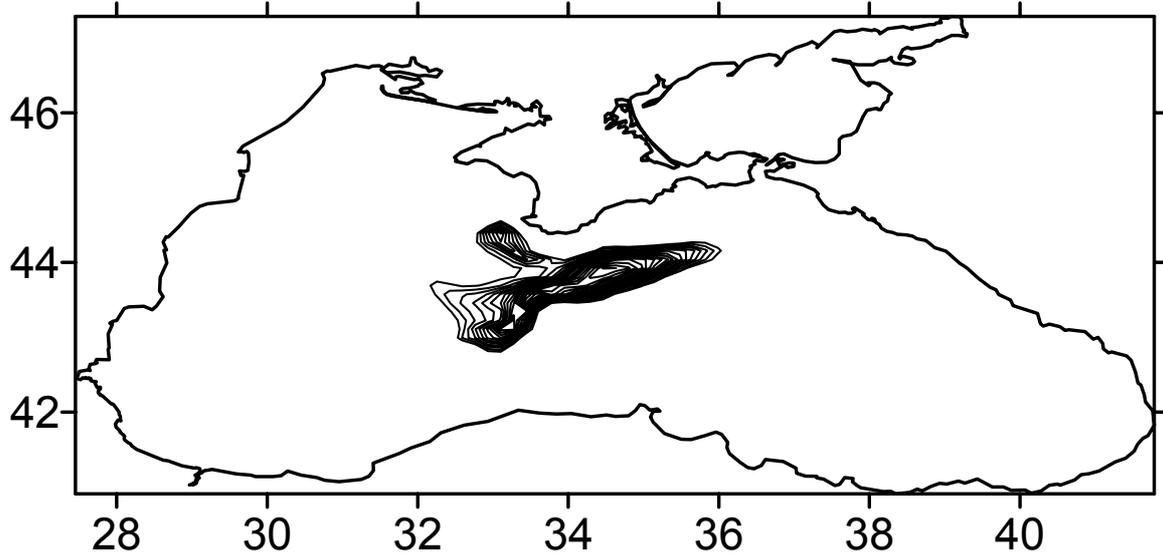


Рис. 11 Восстановленное начальное поле концентрации <sup>137</sup>Cs

Fig. 11 Restored initial concentration field <sup>137</sup>Cs

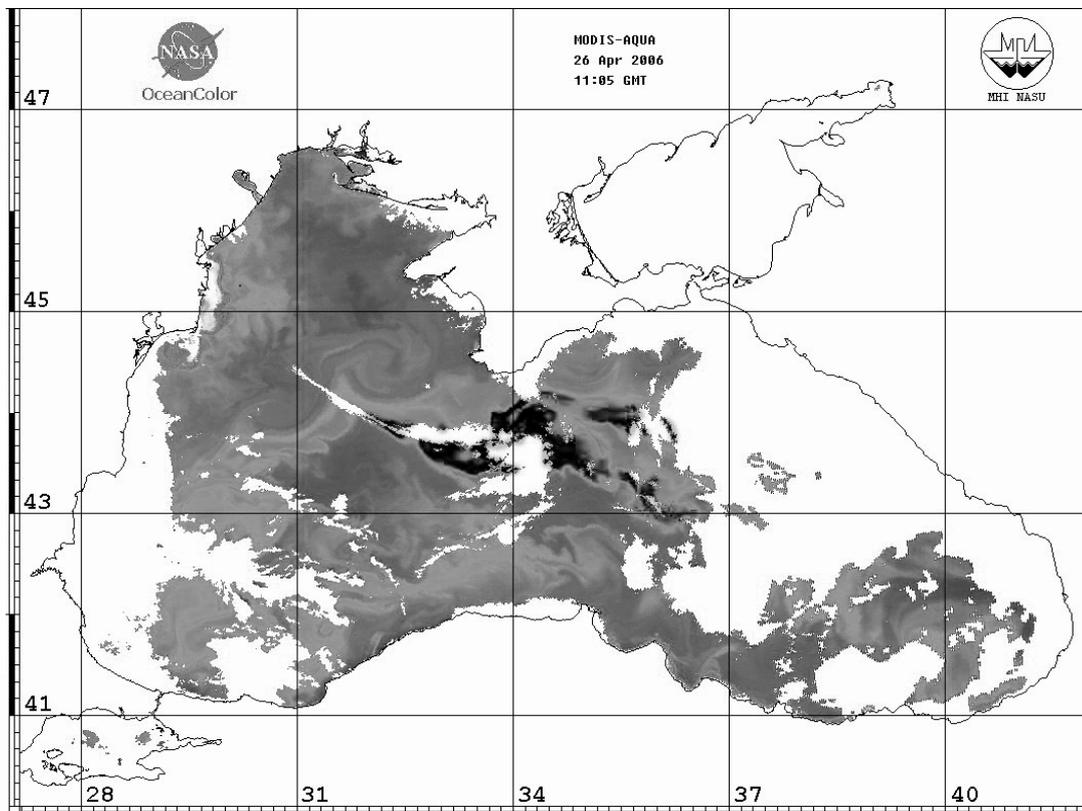


Рис. 12 Условная концентрация кокколитофорид (26 апреля)

Fig. 12 Coccolithophorid's conditional concentration (April 26)

Численные эксперименты по моделированию переноса пассивной примеси в Чёрном море производились со следующими параметрами модели:  $\Delta X = 5 \cdot 10^3 \text{ м}$ ,  $\Delta t = 400 \text{ с.}$ ,  $A_H = 3 \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$ .

На рис. 12 представлена условная концентрация кокколитофорид на поверхности Чёрного моря по данным с ИСЗ (26 апреля). Рассматривая максимум в структуре аналогичного поля на конечный момент времени (рис. 13), в качестве данных измерений восстановим начальное поле, которое соответствует 26 апреля. Задача идентификации решалась на временном интервале 15 сут. В результате работы вариационной процедуры идентификации мы получили поле (рис. 14), согласованное с моделью переноса, в которой использовались климатические поля

скоростей для данного периода времени. Полученный результат хорошо согласуется с данными о пространственном распределении условной концентрации кокколитофорид (рис. 12) на поверхности Чёрного моря.

Сравнивая рис. 14 и 12, наблюдаем хорошую корреляцию между данными измерений и модельными оценками. Максимум условной концентрации кокколитофорид (рис. 14) получился южнее п-ова Крым, где по имеющейся спутниковой информации (рис. 12) произошло её резкое увеличение. Результат прямого моделирования в случае, когда в качестве начальных данных берётся восстановленное поле (рис. 14), представлен на рис. 15. Хорошее соответствие результата данным измерений достигается в силу минимизации квадратичного функционала качества прогноза.

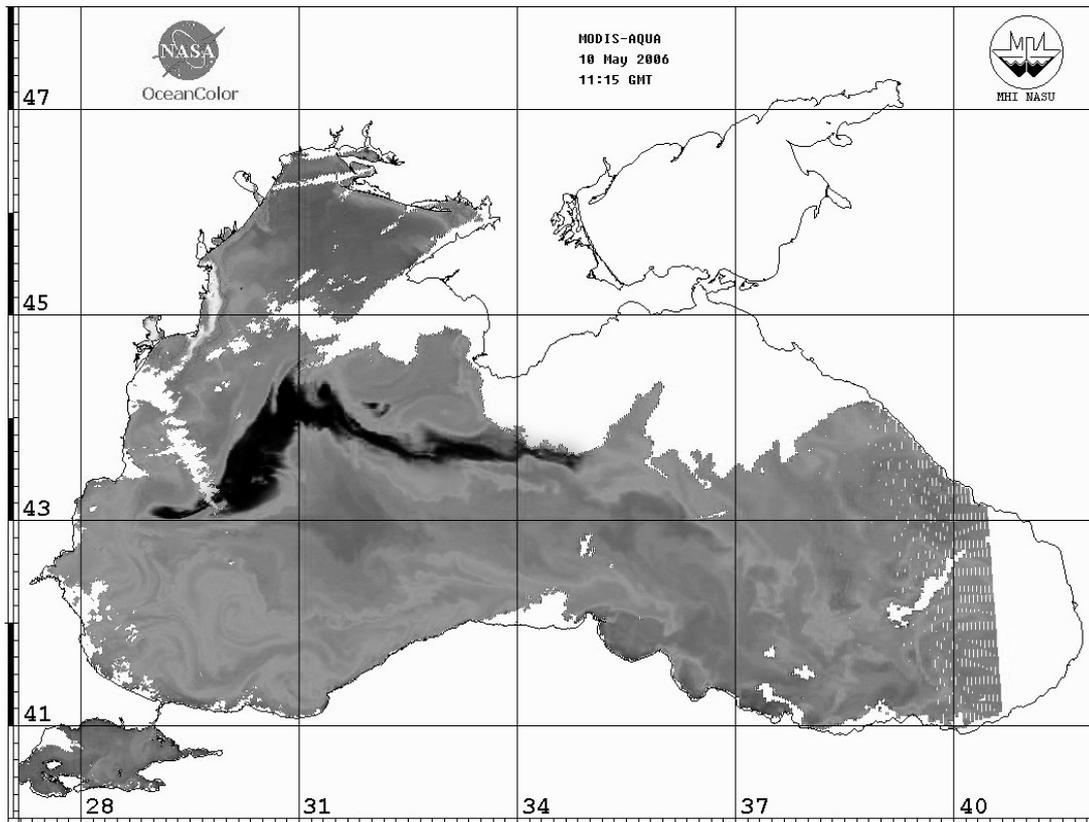


Рис. 13 Условная концентрация кокколитофорид (10 мая)  
Fig. 13 Coccolithophorid's conditional concentration (May 10)

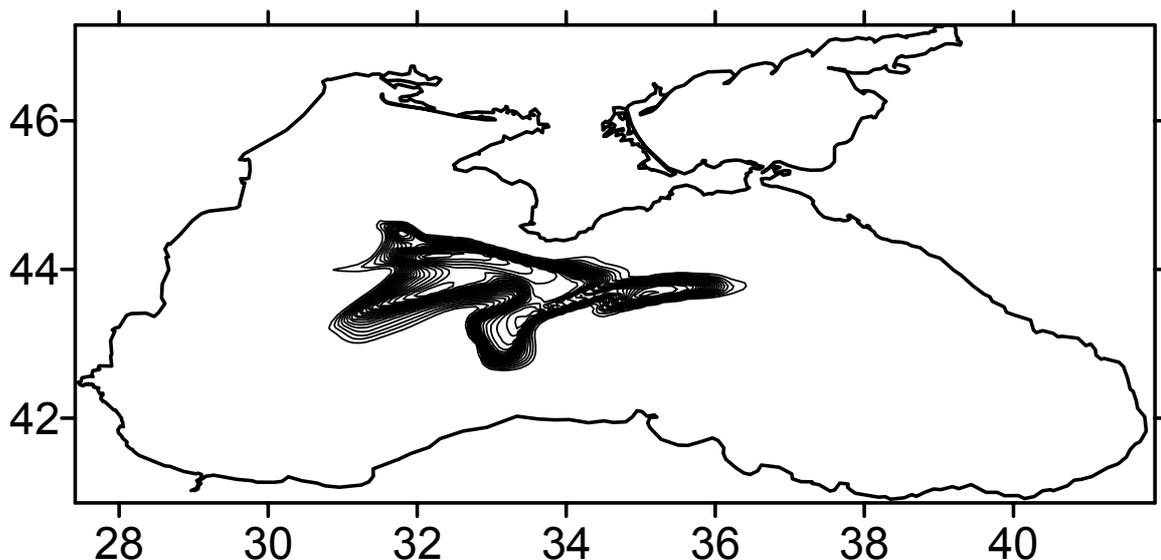


Рис. 14 Модельное распределение кокколитофорид (26 апреля)  
 Fig. 14 Modeling coccolithophorid distribution (April 26)

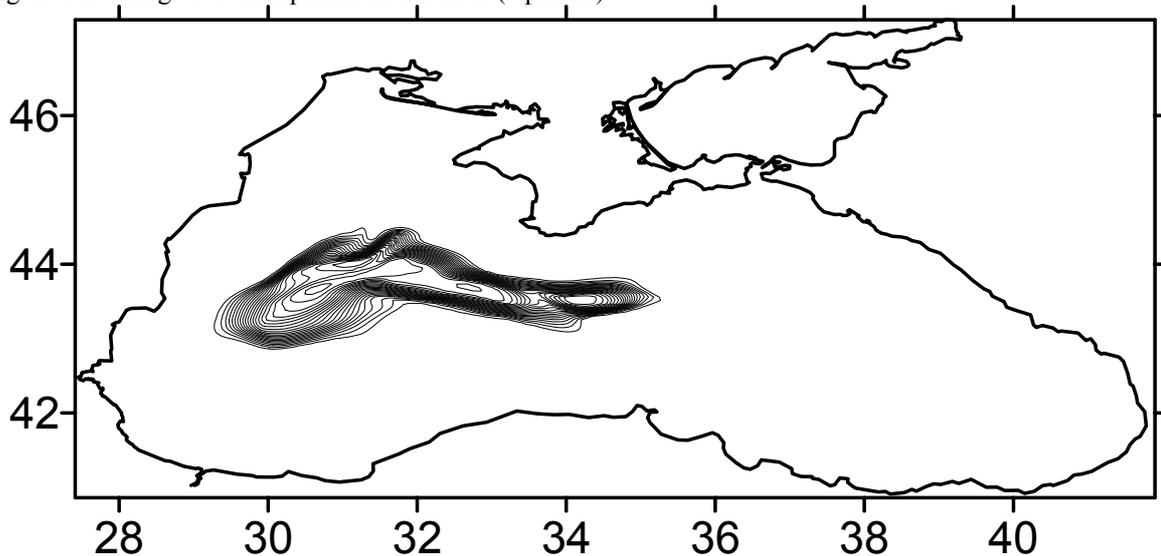


Рис. 15 Модельное распределение кокколитофорид (10 мая)  
 Fig. 15 Modeling coccolithophorid distribution (May 10)

В результате работы вариационного алгоритма идентификации мы имеем возможность получать поля исследуемых характеристик, согласованные не только с данными измерений, но и с моделью переноса пассивной примеси, выступающей в роли пространственно-временного интерполянта. В качестве идентифицируемых параметров модели могут быть выбраны и другие входные параметры, а именно коэффициенты уравнения переноса и поля скоростей, при этом ал-

горитм поиска оптимальных параметров претерпевает незначительные изменения. Однако решение данной задачи требует отдельного исследования. В данной работе мы ограничились инициализацией начальных данных, что в силу линейности задачи дало возможность достичь минимума функционала и идентифицировать начальные поля концентрации исследуемых характеристик.

1. *Атлас* загрязнения Европы цезием после аварии на Чернобыльской атомной станции: Международное научное сотрудничество по последствиям Чернобыльской аварии (1991-1995) Заключительный отчет EUR 16542 EN.- Люксембург: Офис по официальным публикациям Европейской комиссии 1996.
2. Демьшев С.Г., Запелалов А.С., Кубряков А.И., Чудиновских Т.В. Анализ формирования и трансформации поля  $^{137}\text{Cs}$  в Чёрном море после аварии на ЧАЭС // Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа. – Севастополь: МГИ НАНУ, 2001. – С. 28 – 34.
3. Еремеев В.Н., Кочергин В.П., Кочергин С.В., Скляр С.Н. Математическое моделирование гидродинамики глубоководных бассейнов. – Севастополь: ЭКОСИ-Гидрофизика, 2002. – 238 с.
4. Кочергин С.В., Кочергин В.С. Вариационная идентификация параметров модели переноса пассивной примеси и планирование экспериментов // Системы контроля окружающей среды. – Севастополь: МГИ НАНУ, 2005. – С. 186 - 192.
5. Кочергин С.В., Кочергин В.С. Идентификация начальных данных в модели переноса пассивной примеси // Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа. – Севастополь: МГИ НАНУ, 2005. – С. 369 - 373.
6. Пененко В.В. Методы численного моделирования атмосферных процессов. – Л.: Гидрометеоздат, 1981. – 352с.
7. Топачевский А.В., Масюк Н.П. Пресноводные водоросли Украинской ССР. – Киев: Вища школа, 1984. – 330 с.
8. Knysh V.V., Demyshev S.G., Korotaev G.K., Sarkisyan A.S. Four-dimensional climate of season Black Sea circulation // Russ. J. Numerical Analysis and Mathematical Modelling. - 2001. – 16, No.5. – P. 409 - 426.
9. Le Dime, F.-X., Talagrand O. Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observations. Theoretical aspects. // Tellus. – 1986. – 38A. – P. 97 – 110.
10. Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // J. Comput. Phys. – 1983. – P. 353 – 393.
11. Yu L., O'Brien J.J. Variational estimation of the wind stress drag coefficient and the oceanic eddy viscosity profile. // J. Phys. Oceanogr. – 1991. – 21. - P. 709 – 719.
12. Yu L., Malanotte-Rezzoli P. Inverse modeling of seasonal variations in the North Atlantic Ocean // J. Phys. Oceanogr. – 1998. – 28. - P. 902.

Поступила 26 июля 2007 г.

#### **Ідентифікація початкових даних в тривимірній моделі переносу пасивної домішки в Чорному морі.**

**В. М. Єремєєв, С. Г. Демішев, С. В. Кочергін, В. С. Кочергін.** Розглядається модель переносу пасивної домішки, яка заснована на TVD-схемах. Ідентифікація початкового поля досліджуваних характеристик проводиться за допомогою варіаційного алгоритму засвоєння даних вимірювань. Виконані тестові розрахунки ініціалізації океанографічних полів різної природи на основі моделі переносу пасивної домішки в Чорному морі. Проведено засвоєння реальних даних вимірювань концентрації  $^{137}\text{Cs}$  в моделі переносу і відновлені фрагменти початкового просторового розподілу ізотопу в досліджуваних акваторіях.

**Ключові слова:** пасивна домішка, ідентифікація, варіаційний алгоритм засвоєння, засвоєння даних, Чорне море

#### **Identification of initial data in the three-dimensional model of passive impurity transport in the Black Sea.**

**V. N. Ereemeev, S. G. Demyshev, S. V. Kochergin, V. S. Kochergin.** The Model of the passive impurity transport based on TVD-schemes is considered. The initial field is identified using the variation algorithm of measurement data assimilation. Test calculations of initialization of the oceanographic fields of various natures are done based on the model of passive impurity transport of the Black Sea. Assimilation of actual data of  $^{137}\text{Cs}$  measurements in the transport model is carried out. The initial special isotope distributions in the water areas under study are reconstructed.

**Key words:** passive impurity, identification, variation algorithm of assimilation, assimilation of data measurements, Black Sea